Title	レオロジーの幾何学的研究-VI : レオノーム幾何学的考察についての反省
Author(s)	池田, 恵
Citation	物性研究 (1969), 13(1): 17-33
Issue Date	1969-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/87223
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

レオロジーの幾何学的研究 — Ⅵ

— レオノーム幾何学的考察についての反省 —

東大工　池　田　恵

（9月15日受理）

§1 序

我々は，レオロジーを一般的変形体系とみなし，その本質把握のためにレオノーム幾何学を用いるべきことを主張してきたが，[1)2)] レオノーム幾何学そのものについての吟味は余りのべてこなかった。そこで，この論文では，その点の反省を含めて，我々が採用している文献 3）の立場と，レオノーム幾何学を扱っているその他の論文のうち，文献 4），5）の立場との比較検討を行ないつつ，そこに登場してくる条件の物理的意味を吟味していきたいと思う。

§2 問題点

一口に，“レオロジーのレオノーム幾何学的考察”といっても，レオノーム幾何学自体についての種々な幾何学的な問題点が存在し，それらに対して，何をもって，我々にとって合目的的手段とみなすかについての吟味が必要となるわけである。

今までのところ，幾何学的な方法論的拡張としては，主として film — space[6)] と接触テンソル解析的な部分空間への分解論[7)] とをとりあげて，それらが如何に縮退されて，文献 3）の立場に帰着するかをみてきたが，それらの縮退化，特殊化についての詳細な議論も必要なわけである。

今までの議論の本筋は，特に変形の時間的変化をレオノーム幾何学によって記述していこうとし，空間成分についての“強テンソル場”[4)5)] を構成することに集約される。それ故，その立場は文献 3）の立場そのものになることがわかる。高次の時間微分をとり入れることは，時間的共変微分の階数を増やすことによって導入され，高次の時間微分線素（速度，加速度，……）をとり入れることは，高次の強ベクトル線素 $\delta x^{(r)\kappa}$ の採用につながり，更には，時間尺度変換自体も generalized rheonomic transformations によって把

握されることなどが考えられてきたが，[3)6)] レオロジー的に必要なのは，どちらかといえば，高階時間微分の導入であり，文献 3）の立場を更に拡張した形になるが，自由度の関係から，その辺をみてみる必要があろう。

ところで，かくの如く，あくまでも空間成分及びその時間的変化に着目することは，その限りに於ては metric − space としての特性を保存した形で議論していることになり，変形論の性格，ましてやレオロジー的体系の特性として，このことは正当化される問題であるが，film − space に於ては，全体系としては metric − space たり得なく，文献 4)，5）ではその点を別の量によって補償しようとしている。しかし，それらのことは，一般的な立場からみても特殊な条件の下での議論になっているわけで，系統的に把握するにはどう考えたらよいかが問題となる。

もともと，文献 3）の立場というものも，「道」の幾何学から出発しているわけで，その限りでは metric は第二義的なもので，その方面では affine − connexions の決定ということが，第一義的な問題点となっているわけだから，我々はそれをあえて metric − space 的性格を導入して，変形の記述に用いていることになる。

我々が，空間成分の時間的変化に執着するのは，線素の"長さ"というものの変化を追求していこうとしているわけで，あくまで基本計量二次形式は線素の長さの２乗を与えることにしたいからである。これを film − space に拡張すると，その基本計量二次形式は純時間成分（力のポテンシャル）が余分に加わったものとなって，物理的次元が"変形"を表わさなくなる。その点は工学力学系などで，基本計量二次形式を全系のエネルギーに対応させる立場では，[4)5)] かえって film − space 的取扱いの方が有利であろうが，それを我々の場合にあてはめると，実体の判別しにくい時間・空間の混合成分などが出現してきて，必らずしも物理的に有効だとはいえない問題がある。その辺の事情については以下論ずるところであるが，それと関連して，今まで度々のべてきたところの"normal − frame"や"normal − coordinates"についても，文献 4)，5）を参照しながら吟味していきたいと思う。

§3 「レオロジーの幾何学的研究」におけるレオノーム幾何学的立場についての Comments

我々が「レオロジーの幾何学的研究」に用いてきたレオノーム幾何学の概略は次のとおりである。

即ち，変形即座標変換の立場から，それが時間に依存するとして，強ベクトル線素の変換，

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^{\kappa} = A_i^{\kappa}(x,\ t)\ \delta x^{i}, \\ &\text{但し}\quad \delta x^{\kappa} \equiv dx^{\kappa} - x^{(1)\kappa}\ dt \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

を基礎とし，(δx^{κ}, dt) に基づく強テンソル場を構成していこうとする。変形 A_i^{κ} によって，着目される空間成分のはる場の計量は

$$g_{\lambda\kappa} = A_{\lambda}^{j}\ A_{\kappa}^{i}\ \delta_{ji} \tag{3.2}$$

で導入され，これは通常の意味の変形，歪の次元をもつ。そして metric な性格をもっていると考える。次に局所的な状態把握のために，強テンソル場の接続を導入する。強共変微分を

$$DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\ X^{\lambda}\ \delta x^{\mu} + \Gamma_{\lambda}^{\kappa}\ X^{\lambda} dt \tag{3.3}$$

で導入し，強共変微分商を

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_{\mu} X^{\kappa} = \partial_{\mu} X^{\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}\ X^{\lambda}\ :\ \ \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \\ &\nabla X^{\kappa} = D_t X^{\kappa} + \Gamma_{\lambda}^{\kappa} X^{\lambda}\ :\ \ D_t = \partial_t + x^{(1)\mu}\ \partial_{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

で定義する。各接続係数は (i)―空間が変形前の Euclid 空間で δ_{ji} なる計量をもっていると仮定しているから，

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} = A_i^{\kappa}\ \partial_{\mu}\ A_{\lambda}^{i}\ , \\ &\Gamma_{\lambda}^{\kappa} = A_i^{\kappa}\ D_t\ A_{\lambda}^{i} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

で与えられる。この強テンソル場の他のテンソル量は，通常の定義に基づいて，

$$\left.\begin{aligned} &2\,[\nabla_\nu\ \nabla_\mu]\,X^\kappa = R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\kappa}\ X^\lambda - 2\ S_{\nu\mu}^{\cdot\cdot\lambda}\ \nabla_\lambda\ X^\kappa, \\ &2\,[\nabla_\mu\ \nabla]\,X^\kappa = P_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}\ X^\lambda - 2\ Q_{\mu}^{\cdot\lambda}\ \nabla_\lambda\ X^\kappa \\ &\quad \text{但し}\quad [\nabla_\nu\ \nabla_\mu] = \frac{1}{2}\,(\nabla_\nu\ \nabla_\mu - \nabla_\mu\ \nabla_\nu) \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

と定義されるが，(3.5) の時は，本質的にこの系の特徴を表わすべきものとして，(3.6) のテンソル量のかた代わりをする量としては，空間的非ホロノーム対象

$$\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} = -\,\Gamma_{[\mu\lambda]}^{\kappa} = -\,A_\lambda^\kappa\ \partial_{[\mu}\,A_{\lambda]}^{i} \tag{3.7}$$

と，時間的非ホロノーム対象

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_\lambda^\kappa = \omega_\lambda^\kappa + 2\ x^{(1)\mu}\ \Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} + \partial_\lambda\ x^{(1)\kappa} \\ &\quad \text{但し}\quad (\partial_t\,\partial_\lambda - \partial_\lambda\,\partial_t)\ X^\kappa \equiv -\,\omega_\lambda^\mu\,\partial_\mu\ X^\kappa \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

である。Ω_λ^κ を (3.7) の形式にあわせるべく，$\Omega_\lambda^\kappa = -\,\Gamma_\lambda^\kappa$ とおくことは一般的には不可能で，そこに，時間の介入による強ベクトル場の構成という非ホロノーム操作の影響が出てくる。もっとも，強ベクトル場にうつる以前の，単に film − space からの分解をしただけで未だ実体化されていない段階での (dx^κ, dt) − field に於ては，時間・空間の交換可能性が成立つ，即ちホロノームと考える方が現実に適していると考えるならば，$\omega_\lambda^\kappa = 0$ とおける。文献 4) では最初から $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa} = 0$ と仮定しているから，$\Omega_\lambda^\kappa = \partial_\lambda\ x^{(1)\kappa}$ に帰着している。

文献 3) では，度々指摘した如く，はじめから normal − frame を採用していることに注意しなければならない。この標構は時間軸と空間軸が直交していて，我々は，あたかも時間軸そのものに乗って，それに直交する空間成分場の時間的変化をながめていることになる。このことは，空間成分が時間成分に影響を与えることの起りうる相対論的現象以外では，現実の我々の観測操作になっていると考えられる。一方，normal − coordinates は，今度は系のとり方を規定するもので，normal 性は保存しつつ，より macro な形での，みかけの量からの実体の把握を意図する。運動と共に動く系への移行によって，

それに対する不変量を実体として把握せんとする立場になる。形式的には，既にのべた如く，[2), 6)] $\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ の規定を与え，時間微分を Lie ー微分におきかえることを意味する。このことは，(δx^{κ}, dt) をホロノーム化すべく，微少変換をすることに相当し，初期条件，$\tilde{t}=t=0$ で $\tilde{x}^{\kappa}=x^{\kappa}$ を満す ($\tilde{x}^{\kappa}$, $\tilde{t}=t$) をもってきて，

$$\left.\begin{aligned} dx^{\kappa} &= d\tilde{x}^{\kappa} - x^{(1)\kappa}\, d\tilde{t} \\ dt &= d\tilde{t} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

なる微少変換を施すことになり，結果的には $\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\kappa}=\Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa}$, $\tilde{\Gamma}_{\lambda}^{\kappa}=\Gamma_{\lambda}^{\kappa}=-\partial_{\lambda}x^{(1)\kappa}$ で与えられるから，[4)] $\Omega_{\lambda}^{\kappa}=\partial_{\lambda}\,x^{(1)\kappa}$ となって前にのべたところと一致する。[2)]

さて，次に前節にものべたが，metric 性について考えよう。文献 3) は，明らかに m 次の order の「道」の方程式

$$x^{(m)\kappa} + H^{\kappa}(t,\ x,\ x^{(1)},\ \cdots x^{(m-1)}) = 0 \tag{3.10}$$

のレオノーム変換下での不変式論を展開しているわけで，我々は，これに積極的に metric を導入し，計量についての条件である $\nabla_{\mu}\, g_{\lambda\kappa}=0$, $\nabla g_{\lambda\kappa}=0$, 即ち，

$$\left.\begin{aligned} \partial_{\mu}\, g_{\lambda\kappa} &= \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}\, g_{\nu\kappa} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}\, g_{\lambda\nu}, \\ D_{t}\, g_{\lambda\kappa} &= \Gamma_{\lambda}^{\nu}\, g_{\nu\kappa} + \Gamma_{\kappa}^{\nu}\, g_{\lambda\nu} \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

から，接続と計量を結びつけることを考えている。もちろん，その関係は計量のみからは決定され得ず，本質的には $\Omega_{\mu\lambda}^{\kappa}$, $\Omega_{\lambda}^{\kappa}$ が決定されねばならない問題となる。文献 4)，5) では $g_{\lambda\kappa}$ の他に，$g_{\lambda 0}=g_{0\lambda}$, g_{00} といった film ー space 成分が出現するから，(3.11) にそれらをとり入れることができず，従って空間成分のみに着目する立場では，それらを計量にとり入れると non ー metric になってしまうから，どうしても振率，曲率におきかえてやらねばならない。文献 4)，5) では，それらを Dehnungstensor とか Zentrifugalkraft とかの形にまとめている。しかし，それらでは，振率的性格

は考慮していなく，リーマン的に考察している。

「道」の幾何学は計量よりも接続の決定を主眼としているわけで，line－element（$x, x^{(1)} \cdots x^{(m)}$）の変換則を閉じた形で求め，$\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$，$\Gamma_{\lambda}^{\kappa}$ を決定せんとしているが，我々が全体としては nonmetric になる立場に立つ限り系としては閉じなく，ポテンシャル力などの作用を考慮していることに対応する。又，「道」の方程式は空間の geodesics に対応し，それは物理的には最小作用の原理に従うべき物理点の軌跡の方程式になっている。その点から，これが力学系の運動方程式とみなされることになり，我々は，この考えを孤立鎖の各要素の運動方程式と対応づけた。[8] 運動方程式という共通の基盤の上に立った時，高分子溶液，粉・粒体力学，輸送問題などへの応用が有効になろう。

ひとことでいえば，我々の変形論的立場は，文献 3）の「道」の幾何学的立場に計量的性格を導入して接続と計量とを結びつけることによって，系の状態を把握しようとするものである。

次に高階時間微分の導入について考えよう。（δx^{κ}, dt）－ field に高階時間的共変微分（$\nabla, \nabla^2, \cdots \nabla^m$）を導入することである。自由度の関係では line－element（$x, x^{(1)}, \cdots x^{(m)}$）の採用と同等になるが，前にのべた如く，レオロジー的には（$\nabla, \nabla^2, \cdots \nabla^m$）の導入の方が意味をもってくる。つまり，より micro に洞察する立場として，∇^m（$m=1, \cdots$）の導入が図られるわけで，形式的には，(3.3)，(3.4) を

$$\begin{aligned} DX^{\kappa} &= dX^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda} \delta x^{\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda} X^{\lambda} dt \\ &= (\nabla_{\mu} X^{\lambda}) \delta x^{\mu} + \sum_{m=1} (\nabla^m X^{\kappa}) dt^m \end{aligned} \tag{3.12}$$

などと拡張することによって体系づけられる。∇^m によってレオロジー方程式に登場する高次の時間微分係数が実体化され，あくまで，（δx^{κ}, dt）－ field を時間的に掘り下げていくことに対応する。line－element（$x, x^{(1)}, \cdots, x^{(m)}$）を独立変数とみなし，$t$ を parameter として扱う立場は良く知られている如く，n 次元の m 次の order の Kawaguchi 空間 $K_n^{(m)}$ に導かれるのが，[9] そこでは intrinsic transformations しか考えられていないから，[3] レオノーム的に拡張する必要があろう。これらの micro な洞察に対

しては，物理的対応をはっきり意識していないと，単に形式的なものになる恐れがあるから注意しなければならない。

最後に次の点にふれておきたい。

即ち，今までのべてきたところは，もっぱら変形即座標変換の立場であって，それ故に．metric なる概念が必然的に変形，歪に結びついてき，従って空間構造自体も，こと変形場に関する限り metric でなければならないという要請に基づいた議論であった。ところが，あえて，計量即変形という物理的対応を考えなくてもいい場合には，「道」の幾何学そのもので充分役に立つことがわかる。そういう場合は，計量の意味としては，内部自由度間の相互作用だとか，単なる内積の定義のためだとか，指標の上げ下げのためだとかになり，系自体には metric 性の条件は導入されない。我々は，そのいい例として文献 10）の孤立鎖の形態空間の記述をあげることができる。そこでは高次の形態空間に第一段階としてのリーマン計量のみしか導入していなく，第二段階の接続までは考えていないが，逆にいえば，そこに登場する相互作用から計量を決定せんとする立場とも考えられるが，接続の導入という第二段階が物理的に対応づけられていない欠点がある。

一般的傾向として，metric な affine－connexion が“長さ”の概念に結びついた場合には，我々の如き立場となり，それ以外の場合には，単に affine－connexion のみが成立し，metric 性は仮定されてない場合が多い。

§4　フィルム空間からの縮退についての Comments

時間をも独立な座標と考えた film－space を空間時間成分に分解することが文献 3)，4）で考えられている。これらについては，既にのべたところであるから，[2), 6)] 結果については簡単に記したい。文献 3）でははじめから強ベクトル場へ分解するが，文献 4）では，いったん $(\Lambda)=(\lambda,0)$ 分解を行なっておいて改めて強ベクトル場を構成するという手続き上の違いはあるが，分解の考え方は同じである。

film－space での共変微分が

$$DX^{\Lambda} = dX^{\Lambda} + \overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda}_{NM}\, X^{M}\, dx^{N} \tag{4.1}$$

で与えられるとした時，これのベクトル性から $\overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda}_{NM}$ についての変換則が得られ，それから $(\Lambda)=(\lambda, 0)$ 分解をすることにより，各成分についての性格が判断されてくるが，ベクトル的変換をする成分は任意にとってかまわないという要請の下に消失すると考えると，既にのべたように，[1)6)]

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{\mu\lambda} = 0, \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{\mu 0} = 0, \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{0\lambda} = 0, \tag{4.2}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{00} = -\Gamma \quad (\text{スカラー}) \tag{4.3}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}, \tag{4.4}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\lambda 0} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}\, x^{(1)\mu}, \tag{4.5}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{0\lambda} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\, x^{(1)\mu}, \tag{4.6}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{00} = -\left\{x^{(2)\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\, x^{(1)\lambda}\, x^{(1)\mu} + 2\,\Gamma^{\kappa}_{\lambda}\, x^{(1)\lambda} + \Gamma\, x^{(1)\kappa}\right\} \tag{4.7}$$

などを得る。文献 4) では，はじめから，

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{NM} = 0, \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda}_{NM} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda}_{MN} \tag{4.8}$$

と仮定してリーマン的に扱っている。文献 4) の如く，$\overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda}_{NM}$ をいったん $(\Lambda)=(\lambda, 0)$ 分解して然る後に強ベクトル場へ移行する立場では，強ベクトル場の共変微分としては

$$DX^{\kappa} = dX^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\, X^{\lambda}\, \delta x^{\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda}\, X^{\lambda}\, dt \tag{4.9}$$

なる形になるから，文献 3) の立場では，(4.4)，(4.6) に相当するものが (4.9) に登場してきて，それ以外は消失するということになる。これらのことは，normal－frame のレオノーム変換から，

$$\left.\begin{aligned} de_{\kappa} &= (\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\kappa}\, \delta x^{\mu} + \overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{0\kappa}\, dt)\, e_{\lambda}, \\ de_{0} &= (\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{\mu 0}\, \delta x^{\mu} + \overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{00}\, dt)\, e_{0} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

が成立たねばならず，従って（4.10）に登場する 4 種類しか出現しなくなるが（4.2）のために，結局（$\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{0\lambda}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{0}_{00} = -\Gamma$）の三種類しか出現してこなくなる。（4.8）の場合には（$\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{\mu\lambda}$, $\overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{0\lambda}$）の 2 種類である。（4.10）への帰着が実は非ホロノーム条件となっていることに注意しなければならないが，これらの議論の背景には，空間は時間方向に，はみだしてはいないことなどが考慮されていて，film−space からの縮退も，かくして我々の立場に帰着することになる。文献 4）の立場は，文献 5）を film−space 的に扱ったものといえ，特徴ある量としての伸脹テンソル（Dehnungs tensor）は本質的に，

$$W^{\kappa}_{\lambda} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{0\lambda} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\, x^{(1)\mu} \tag{4.11}$$

のことであり，遠心力（Zentrifugalkraft）は

$$W^{\kappa} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\kappa}_{00} \tag{4.12}$$

のことといえるが，我々の立場に還元すると，W^{κ}_{λ} の方は変形の時間的変化そのものとしてとり入れられるが，W^{κ} の方は外からの作用として把握されるから，純空間成分の場には，直接とり入れられないことになる。W^{κ} が次節でのべる如く，純時間的 potential 力に相当していることからもうなづける。計量についても同様の分解が可能であるが，$\overset{*}{g}_{\lambda\kappa}$, $\overset{*}{g}_{\lambda 0} = \overset{*}{g}_{0\lambda}$, $\overset{*}{g}_{00}$ などを如何に対応づけていくかが問題となり，これらのことは次節の "Absolute Mechanik" と関連づけた方がわかりやすいので，次にゆずる。

最後に，この分解操作に関して次のことをのべておきたい。

それは，今までの如く，$(A) = (\lambda, 0)$ 分解の結果を比較検討することも必要であるが，その分解自体に着目してみることも有効ではないかということである。もちろん，その分解操作そのものに物理的意味をもたせることは仲々困難であり，物理的意味は，分解された結果にのみ求められるべきであるかも

しれぬが，方法論的な厳密さを要求する時は，以下のべるところも考慮されて然るべきだと信ずる。それは，前論文[7]でのべたところの接触テンソル解析的な非ホロノーム部分空間の分解論[11]を $(\Lambda)=(\lambda,0)$ 分解に摘用することである。詳細は省略するが，(Λ)ー空間の二自由度 $(\lambda,0)$ への分解で，しかも強ベクトル場への分解という非ホロノーム分解が対応してくる。

今，その分解を与えるところの Connecting quantities[11] $(B^{\Lambda}_{\cdot\kappa},\ C^{\Lambda}_{\cdot 0})$ (但し $\Lambda=1\cdots n,\ n+1$；$\kappa=1\cdots n$）とおき，この逆要素を $(B^{\cdot\lambda}_{M},\ C^{\cdot 0}_{M})$ とおくことにすれば，

$$\left.\begin{aligned}&B^{\Lambda}_{\cdot\kappa}\ B^{\cdot\lambda}_{\Lambda}=\delta^{\lambda}_{\kappa},\quad B^{\Lambda}_{\cdot\kappa}\ C^{\cdot 0}_{\Lambda}=0,\quad C^{\Lambda}_{\cdot 0}\ B^{\cdot\lambda}_{\Lambda}=0,\\&C^{\Lambda}_{\cdot 0}\ C^{\cdot 0}_{\Lambda}=1,\\&B^{\Lambda}_{\cdot\kappa}\ B^{\cdot\kappa}_{M}+C^{\Lambda}_{\cdot 0}\ C^{\cdot 0}_{M}=\delta^{\Lambda}_{M}\end{aligned}\right\}\tag{4.13}$$

が成立つ。これに対して rheonomic geometry 的立場に移行するには，

$$\left.\begin{aligned}&B^{\Lambda}_{\cdot\kappa}=(\delta^{\lambda}_{\kappa},\ B^{0}_{\kappa}=0),\qquad C^{\Lambda}_{\cdot 0}=(C^{\lambda}_{0},\ C^{0}_{0}=1)\\&B^{\cdot\kappa}_{\Lambda}=(\delta^{\kappa}_{\lambda},\ B^{\kappa}_{0}=-C^{\kappa}_{0}),\quad C^{\cdot 0}_{\Lambda}=(C^{0}_{\lambda}=0,\ C^{0}_{0}=1)\end{aligned}\right\}\tag{4.14}$$

なる特殊化を行なわねばならない。これにより，線素 dx^{Λ} も

$$\left.\begin{aligned}&(dx)^{\kappa}=B^{\cdot\kappa}_{\Lambda}\ dx^{\Lambda}=dx^{\kappa}-C^{\kappa}_{0}\ dt,\\&(dx)^{0}=C^{\cdot 0}_{\Lambda}\ dx^{\Lambda}=dx^{0}=dt\end{aligned}\right\}\tag{4.15}$$

と分解され，偏微分操作も，

$$\left.\begin{aligned}&D_{\kappa}\ f\equiv B^{\Lambda}_{\cdot\kappa}\ \partial_{\Lambda}f=\partial_{\kappa}f\\&D_{t}\ f\equiv C^{\Lambda}_{\cdot 0}\ \partial_{\Lambda}f=\partial_{t}f+C^{\lambda}_{0}\ \partial_{\lambda}f\end{aligned}\right\}\tag{4.16}$$

の如くなって通常のレオノーム幾何的になる。又，この時の非ホロノーム対象は，

$$\Omega^{\kappa}_{0\lambda}\equiv\frac{1}{2}\ B^{\cdot\kappa}_{\Lambda}(D_{t}\ B^{\Lambda}_{\cdot\lambda}-D_{\lambda}\ C^{\Lambda}_{\cdot 0})=-\frac{1}{2}\ \partial_{\lambda}\ C^{\kappa}_{0}\tag{4.17}$$

で与えられ，$C^{\kappa}_{0} = - B^{\kappa}_{0} = x^{(1)\kappa}$ ならば文献 4）のものと一致する。接続も

$$\left.\begin{aligned} DX^{\Lambda} &= dX^{\Lambda} + \Gamma^{\Lambda}_{NM} X^{M} dx^{N} \\ \nabla_{N} X^{\Lambda} &= \partial_{N} X^{\Lambda} + \Gamma^{\Lambda}_{NM} X^{M} \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

から，

$$\left.\begin{aligned} DX^{\kappa} &= dX^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda} (dx)^{\mu} + \Gamma^{\kappa}_{0\lambda} X^{\lambda} dt \\ &= (\nabla_{\mu} X^{\kappa}) \cdot (dx)^{\mu} + (\nabla X^{\kappa}) dt , \\ \text{但し，} &\begin{cases} \nabla_{\mu} X^{\kappa} \equiv \partial_{\mu} X^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} X^{\lambda}, \\ \nabla X^{\kappa} \equiv D_{t} X^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}_{0\lambda} X^{\lambda} \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

と分解され，各接続係数は，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} &= (B^{M}_{\cdot\mu} B^{\Lambda}_{\cdot\lambda} \Gamma^{K}_{M\Lambda} + \partial_{\mu} B^{K}_{\cdot\lambda}) B^{\cdot\kappa}_{K}, \\ \Gamma^{\kappa}_{0\lambda} &= (C^{M}_{\cdot 0} B^{\Lambda}_{\cdot\lambda} \Gamma^{K}_{M\Lambda} + D_{t} B^{K}_{\cdot\lambda}) B^{\cdot\kappa}_{K} \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

で与えられることとなる。曲率テンソルや捩率テンソルは，∇_{μ}, ∇ によって (3.6) と全く同様に定義される。もう一つこの取扱いで導入されるテンソルは，Euler－Schouten 曲率テンソル[7),11)]に類するもので，

$$\left.\begin{aligned} \nabla_{\mu} B^{\Lambda}_{\cdot\lambda} &= H^{\cdot\cdot 0}_{\mu\lambda} C^{\Lambda}_{\cdot 0} , & \nabla_{\mu} C^{\Lambda}_{\cdot 0} &= H^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu 0} B^{\Lambda}_{\cdot\kappa} \\ \nabla B^{\Lambda}_{\cdot\lambda} &= H^{\cdot\cdot 0}_{0\lambda} C^{\Lambda}_{\cdot 0} , & \nabla C^{\Lambda}_{\cdot 0} &= H^{\cdot\cdot\kappa}_{00} B^{\Lambda}_{\cdot\kappa} \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

で定義されるが，(4.14) の下では $H^{\cdot\cdot\kappa}_{\mu 0}$ と $H^{\cdot\cdot\kappa}_{00}$ しか出現しない。これらは，いわば時間・空間の混合成分で，$(\Lambda) = (\lambda, 0)$ 分解故に出現してくるものだから，それぞれ W^{κ}_{μ} と W^{κ} に相当していると解される。この点を文献 4）は見逃がしている。(x^{κ}, t) － field を film－space として把握した時に，改めてそれを空間成分の強ベクトル場へ分解することを考えなければならないが，その操作を与えるのが Connecting quantities であり，それを特殊化することによって通常のレオノーム幾何学的場を得ることができる。しかし，

この分解自体は，一つの論理を与えているのみで，変形に相当しているわけでなく，そしてや，今までのべてきたところは，文献 11）が意図しているところの接触変換とは何ら直接的な関係はなく，分解操作を勝手に用いただけにすぎない。

以上のべてきたところからもわかる如く，我々の立場に立つ限り， film－space 的拡張は系統的取扱いができるという便利さはあるが，一般的になりすぎて，物理的実体が伴なわなくなる恐れがある。もちろん，論理の拡張としての有効性はあるが。

§5　力学系のレオノーム幾何学的考察に対する Comments

今まで度々ひきあいに出した文献 5）の考察に対する Comments をこの節でまとめておきたい。おそらく一般的にレオノーム幾何学及びその力学系（質点の運動とか，三次元中の曲面の運動とかだが）への応用を系統的に扱った最初の論文だと思われるので，改めて参照しておきたい。

まず，A. Wundheiler は“Rheonome Geometrie”を rheonomic transformations

$$\left.\begin{aligned} x^{\kappa} &= x^{\kappa}(x^{i},\ t) \\ \tau &= t \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

の下での不変量を求めることとみなし，基本になるべき不変量として

$$ds^2 = g_{\lambda\kappa}\, dx^{\kappa}\, dx^{\lambda} + 2\, \alpha_{\lambda}\, dx^{\lambda}\, dt + A\, dt^2 \qquad (5.2)$$

を採用し，この二次形式の不変式論を展開せんとする。（5.2）には $ds^2 = 2\,T\,dt^2$ なる力学系のエネルギー T という物理的量が付随しているから長さの次元はもっていない。$g_{\lambda\kappa}$ を基本計量テンソル，α_{λ} を運送速度（Führungs－geshwindigkeit)，A を運送力（lebendige Kraft der Führung）とよんでいる。α_{λ} や A をとり入れた強ベクトル場を構成せんとしている。強ベクトル線素としては，（3.1）の如く，

$$\delta x^{\kappa} = dx^{\kappa} + \alpha^{\kappa}\, dt\,; \quad \alpha^{\kappa} = g^{\kappa\lambda}\, \alpha_{\lambda} \qquad (5.3)$$

を採用し，(5.2) を

$$ds^2 = g_{\lambda\kappa}\ \delta x^\kappa\ \delta x^\lambda + \mathscr{A}\ dt^2\ :\ \mathscr{A} = A - \alpha_\lambda\ \alpha^\lambda \tag{5.4}$$

とかきなおす。$\mathscr{A}$ を横断運送力 (transversale lebendige Kraft) とよんでいる。(5.4) でわかる如く，normal－frame を採用すれば，α_λ が表面には出てこないことがわかる。(5.4) の形式は文献 4) のものにも一致する。次に，この強ベクトル場の接続を，強共変微分

$$\left.\begin{aligned} DX^\kappa &= dX^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\ X^\lambda\ dx^\mu + \Gamma^\kappa_\lambda\ X^\lambda\ dt \\ &= (\nabla_\mu\ X^\kappa)\ \delta x^\mu + (\nabla\ X^\kappa)\ dt \\ \text{但し，}&\begin{cases} \nabla_\mu\ X^\kappa \equiv \partial_\mu\ X^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\ X^\lambda, \\ \nabla\ X^\kappa \equiv \partial_t\ X^\kappa - \alpha^\mu\ \nabla_\mu\ X^\kappa + \Gamma^\kappa_\lambda\ X^\lambda \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

で導入しているが，文献 3) のものとは，元々の強共変微分の導入形式が異なるのみである。$g_{\lambda\kappa}$ については $\nabla_\mu\ g_{\lambda\kappa} = 0$，$\nabla\ g_{\lambda\kappa} = 0$ を仮定し，これについては metric と考えている。更に，系 (κ) を holonomic と仮定し全体がリーマン空間であると考えているために，

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} &\equiv \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\} = \frac{1}{2}\ g^{\kappa\nu}\ (\partial_\mu\ g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda\ g_{\nu\mu} - \partial_\nu\ g_{\mu\lambda}) \\ \Gamma^\kappa_\lambda &\equiv \left\{ {\kappa \atop \lambda} \right\} = \frac{1}{2}\ g^{\kappa\nu}\ (\partial_t\ g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda\ \alpha_\nu - \partial_\nu\ \alpha_\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

で与えられることになる。次に例の伸張テンソル (Dehnungs tensor) だが，その定義はホロノーム系では，

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\delta}(g_{\lambda\kappa}\ \delta x^\kappa\ \delta x^\lambda) \equiv 2\ W_{\lambda\kappa}\ \delta x^\lambda\ \delta x^\kappa\ \bar{d}t\ ;\ W_{\lambda\kappa} = W_{\kappa\lambda}. \\ &\text{但し，}\quad \bar{\delta} x^\kappa = 0,\ i.e.\ \bar{d} x^\kappa = -\alpha^\kappa\ \bar{d}t\ \text{なる変移} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{に対しての純時間的変化。} \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

であり，具体的には

$$W_{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}\ (\partial_t\ g_{\lambda\kappa} - \nabla_\lambda\ \alpha_\kappa - \nabla_\kappa\ \alpha_\lambda) \tag{5.8}$$

である。正に変形の時間的変化を与えていることになるが，見方をかえると α^{κ} による Lie 微分 $\frac{1}{2}\underset{\alpha}{\mathcal{L}}\, g_{\lambda\kappa}$ であることがわかる。次に，系(κ) を $(b^{\kappa}_{\lambda'})$ によって非ホロノーム変換することを考える。その変換自身がレオノーム的であるとして，

$$dx^{\kappa} = b^{\kappa}_{\lambda'}\, dx^{\lambda'} + b^{\kappa}\, dt, \tag{5.9}$$

強ベクトル化して

$$\delta x^{\kappa} = b^{\kappa}_{\lambda'}\, \delta x^{\lambda'} + B^{\kappa}\, dt \;;\; \begin{cases} B^{\kappa} = \alpha^{\kappa} + b^{\kappa} - b^{\kappa}_{\lambda'}\, \beta^{\lambda'}, \\ \beta_{\lambda'} = b_{\lambda'\kappa}\,(\alpha^{\kappa} + b^{\kappa}) \end{cases} \tag{5.10}$$

なる変換に帰着する。時間まで含めてそれを explicit に表わした場合には B^{κ} という横断速度(Quergeschwindigkeit) が出現し，その時の非ホロノーム条件は

$$b^{\lambda'}_{\kappa}\, B^{\kappa} = 0 \quad ; \quad i.e \quad \delta x^{\kappa'} = b^{\kappa'}_{\lambda}\, \delta x^{\lambda} \tag{5.11}$$

である。この条件は，系(κ') では二次形式が，

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= b_{\lambda'\kappa'}\, dx^{\kappa'} dx^{\lambda'} + 2\,\beta_{\lambda'}\, dx^{\lambda'} dt + B\, dt^2 \\ &\text{但し}\quad b_{\lambda'\kappa'} = b^{\lambda}_{\lambda'}\, b^{\kappa}_{\kappa'}\, g_{\lambda'} \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

で表わされるに至るとした時に，これを強ベクトル表示して

$$ds^2 = b_{\lambda'\kappa'}\, \delta x^{\kappa'} \delta x^{\lambda'} + \mathcal{B}\, dt^2 \;;\; \mathcal{B} = \mathcal{A} + B_{\lambda}\, B^{\lambda} \tag{5.13}$$

となる時，直交性が保存されていることに相当する。文献 5) では，(λ')−空間として三次元中の曲面を考えているため $(b^{\lambda'}_{\kappa})$ は部分空間への射影操作を表わし，従って文献 11) の如く，Euler−Schouten tensor (A. Wundheiler は強制曲率テンソル (Tensoren der erzwungenen Krümmung) とよんでいるが) が出現し，

$$\left.\begin{aligned} H_{\mu'}{}^{\cdot}{}_{\lambda'}{}^{\cdot\,\kappa} &= b^{\mu}_{\mu'}\, \nabla_{\mu}\, b^{\kappa}_{\lambda'} \\ H_{\mu'}{}^{\cdot\,\kappa} &= \nabla\, b^{\kappa}_{\mu'} \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

で与えられることになるが，これらをレオノーム幾何学的に解釈すれば，前節最後にのべたところとなる。

もう一つの特徴ある量は遠心力（Zentrifugalkraft）はホロノーム系だと，

$$S_\kappa = \frac{1}{2}\partial_\kappa \mathscr{A}, \quad (\text{文献 4) では } W_\kappa \text{ とかいている}) \tag{5.15}$$

非ホロノーム系だと

$$S_{\kappa'} = b^{\lambda}_{\kappa'}\left(\frac{1}{2}\partial_\lambda \mathscr{A} - \nabla B_\lambda - B^\mu \nabla_\mu B_\lambda - W_{\lambda\mu} B^\mu\right) \tag{5.16}$$

で与えられ，明らかに純時間的ポテンシャル力になっていることがわかる。

$W_{\lambda\kappa}$ は非ホロノーム系では

$$W_{\lambda'\kappa'} = b^{\lambda}_{\lambda'} b^{\kappa}_{\kappa'} W_{\lambda\kappa} - B_\mu H^{\cdot\cdot\mu}_{\lambda'\kappa'} \tag{5.17}$$

で与えられ，必らずしも対称ではなくなり，$H^{\cdot\cdot\mu}_{\mu'\lambda'}$ に依存するところ大である。

以上のべてきた一連の幾何学的取扱いを，A. Wundheiler は"Absolute Mechanik"に応用しているわけだが，$ds^2 = 2T\,dt^2$ の非ホロノーム・レオノーム変換下の不変式論の結果としての運動方程式の絶対形を求めている。それは Hamilton のエネルギー変分原理

$$\int(\bar{\delta}T + Q_\lambda \bar{\delta}x^\lambda)\,dt = 0 ; \left(\begin{array}{l} Q_\lambda \text{ は外力,} \\ \bar{\delta} \text{ は曲線にそう共変微分} \end{array}\right) \tag{5.18}$$

に基づいて，$2T = v^2 + \mathscr{A}\ (v^\kappa = \dot{x}^\kappa + \alpha^\kappa)$ から計算すると，絶対方程式（absolute Gleichungen）として

$$\frac{Dv^\kappa}{dt} + W^\kappa_\lambda v^\lambda = S^\kappa + Q^\kappa \tag{5.19}$$

を得る。この式は非ホロノーム系に移しても（5.16），（5.17）を用いれは不変に保たれることが示されている。この式で Coliolis 力的なある仮想的な力 $W^\kappa_\lambda v^\kappa$ は系のとり方によって消失させうるとすれば，（5.19）は

$$\frac{dv^{\kappa}}{dt} + \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} v^{\lambda} v^{\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda} v^{\lambda} = Q^{\kappa} + S^{\kappa} \tag{5.20}$$

という良く知られた「道」の方程式に帰着する。

かくして，今までのべたところをまとめると，要するに，強ベクトル場の構成を図るわけだが，A. Wundheiler では非ホロノーム・レオノーム変換を空間及び時間成分に分解して，それを明示的に表現し，あくまでも film－space 的な kinetische Energie T の不変式論を展開しているわけで，我々の normal－frame 採用の立場を含む立場であるが，幾何学的には，あくまでリーマン空間のレオノーム的拡張を図っているわけで，捩率的性格には着目していない。又，$Dg_{\lambda\kappa}=0$ で空間成分 $g_{\lambda\kappa}$ については metric を仮定しているが，その他の成分については non－metric のままで考察し，むしろ $g_{\lambda\kappa}$ 以外の α_{λ}, A などの余分な自由度を積極的に取入れようとして，Dehnungs tensor $W_{\lambda\kappa}$ や Zentrifugalkraft S_{κ} として物理的意味を与えんとしている。もう一つは Euler－Schouten 曲率テンソルに着目していることで，これは部分空間分解の際には必らず登場すべきもので，(5.17) の如く $W_{\lambda'\kappa'}$ に結びつけられ，部分空間内での変形の時間的変化にも寄与していることが示されている。

§6 結　び

この論文では，我々が今までよりどころとしてきた文献 3) の立場について，文献 4), 5) との比較検討を行なってきた。文献 4), 5) の取扱いは，(n+1)－次元の film－space 中での記述であり，時間的成分と空間的成分とを直交化して扱おうとしているが，時間軸をも含めて不変式論を展開しているために，空間成分の時間的変化を追求するレオロジー的立場よりも広くなっている。“normal－frame”については自然に採用されていると考えて然るべきだが，“normal－coordinates”については，我々の観測系を指定するという意味で特殊な変換を余儀なくさせている。空間構造の metric 性については，純空間成分については，ベクトルの平行移動ではその長さが保存されるという要請を満たすべく仮定されるが，他の成分についてはその限りでなく，特徴的に把握することが考えられているが，文献 4), 5) の見落している

振率的要素に結びつけることが有効ではないかと考えている。

§7 参考文献

1) 池田 恵， 物性研究， 12−2 (1969), 117.

2) 池田 恵， 物性研究， 12−3 (1969), 178.

3) T. Suguri, J. Math. Soc. Japan, 4 (1952), 231.

4) N. Oshima, Memoirs, 1 B−II (1955), 240.

5) A. Wundheiler, Prace Mat. − Fizy., 40 (1933), 97.

6) 池田 恵， 物性研究， 12−5 (1969), 305.

7) 池田 恵， 物性研究， 12−6 (1969), 365.

8) 池田 恵， 物性研究， 12−4 (1969), 245.

9) M. Kawaguchi, RAAG Memoirs, 3, Misc. IV (1962), 718.

10) J. J. Erpenbeck & J. G. Kirkwood, J. Chem. Phys., 29 (1958), 909.

11) K. Yano & E. T. Davies, Annali di Matematica, 37 (1954), 1.